NMSA334: cvičení 1 – vytvořující funkce celočíselných náhodných veličin

Definice 1.1: Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ je posloupnost reálných čísel. Jestliže mocninná řada $A(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$ konverguje pro $|s| < s_0$ pro nějaké $s_0 > 0$, potom $A(s)$ nazveme *vytvořující funkcí* posloupnosti $\{a_n\}$.

Připomeňme základní vlastnosti mocninných řad:

1. Existuje právě jedno číslo $0 \le R \le \infty$ takové, že pro $|s| < R$ řada konverguje absolutně a pro $|s| > R$ diverguje. Číslo R se nazývá *poloměr konvergence* a platí (Cauchyův-Hadamardův vzorec):

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

2. Má-li řada $A(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$ poloměr konvergence R, má i řada $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n s^{n-1}$ poloměr konvergence R a pro $|s| < R$ platí $A'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n s^{n-1}$. Derivování mocninné řady člen po členu lze použít i pro vyšší derivace. Pro koeficienty a_n platí

$$a_n = \frac{A^{(n)}(0)}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

3. *Abelova věta*: Nechť řada $A(s)$ konverguje absolutně pro $|s| < 1$. Jestliže $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a < \infty$, potom $\lim_{s\to 1-} A(s) = a$. Je-li $a_n \ge 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$, potom $\lim_{s\to 1-} A(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = a \le \infty$, neboli tvrzení platí i v případě, kdy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverguje.

Úmluva: Pro zjednodušení budeme limity $A(s)$, $A'(s)$, $A^{(k)}(s)$ pro $s \to 1-$ označovat jako $A(1)$, $A'(1)$, $A^{(k)}(1)$. Pro $R > 1$ využíváme spojitosti mocninné řady, pro $R = 1$ Abelovu větu (limita existuje).

Definice 1.2: Nechť X je nezáporná celočíselná náhodná veličina. Její rozdělení je určeno pravděpodobnostmi $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, $p_n = P(X = n)$. Vytvořující funkci posloupnosti $\{p_n\}$ nazýváme *vytvořující funkcí náhodné veličiny* X, značíme $P_X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n$.

Zřejmě platí $P_X(1) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$. Poloměr konvergence řady $P_X(s)$ je tedy nejméně 1. Všimněme si, že $P_X(s) = \mathrm{E}s^X$.

Věta 1.1: Nechť X je nezáporná celočíselná náhodná veličina. Pak pro její momenty platí:

(i) $\mathrm{E}X = P_X'(1)$,

(ii) $\mathrm{E}X(X-1)\cdots(X-k+1) = P_X^{(k)}(1)$,

(iii) $\operatorname{var} X = P_X''(1) + P_X'(1) - \left(P_X'(1)\right)^2$, je-li $\mathrm{E}X < \infty$.

Věta 1.2: Nechť X je nezáporná celočíselná náhodná veličina. Položme

$$q_n = P(X > n) = \sum_{j=n+1}^{\infty} p_j, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

a nechť $Q(s) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n s^n$ je vytvořující funkce posloupnosti $\{q_n\}$. Potom

$$Q(s) = \frac{1 - P_X(s)}{1 - s}, \quad |s| < 1.$$

Dále platí $\mathrm{E}X = Q(1)$ a $\operatorname{var} X = 2Q'(1) + Q(1) - Q(1)^2$.

Příklad 1.1: Najděte vytvořující funkci Poissonova rozdělení a určete její poloměr konvergence. Pomocí vytvořující funkce spočtěte střední hodnotu a rozptyl.

Příklad 1.2: Najděte vytvořující funkci geometrického rozdělení a určete její poloměr konvergence. Pomocí vytvořující funkce spočtěte střední hodnotu a rozptyl.

Příklad 1.3: Vyjádřete $P_{2X}(s)$ pomocí $P_X(s)$.

Příklad 1.4: Vyjádřete $P_{X+1}(s)$ pomocí $P_X(s)$.

Příklad 1.5: Vyjádřete $P_{aX+b}(s)$ pomocí $P_X(s)$ pro $a, b \in \mathbb{N}_0$.

Příklad 1.6: Mějme posloupnost n bernoulliovských pokusů. Najděte pravděpodobnost, že počet zdarů bude sudý.

Příklad 1.7: Uvažujme posloupnost bernoulliovských pokusů. Najděte pravděpodobnost, že dvojice (zdar, nezdar) nastane poprvé v pokusech $(n, n+1)$.

Příklad 1.8: Najděte příklad rozdělení nezáporné celočíselné náhodné veličiny X, jejíž vytvořující funkce $P_X(s)$ má poloměr konvergence $R = 1$.

NMSA334: cvičení 2 – konvoluce

Definice 2.1: Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel. Definujme posloupnost $\{c_n\}$ předpisem

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Posloupnost $\{c_n\}$ se nazývá *konvoluce* posloupností $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$, značíme $\{c_n\} = \{a_n\} * \{b_n\}$.

Věta 2.1: Nechť $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ jsou reálné posloupnosti s vytvořujícími funkcemi $A(s)$, $B(s)$. Potom vytvořující funkce $C(s)$ konvoluce $\{c_n\} = \{a_n\} * \{b_n\}$ je dána výrazem $C(s) = A(s)B(s)$.

Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny nabývající nezáporných celočíselných hodnot:

$$P(X = j) = p_j, \quad P(Y = k) = q_k, \quad j, k \in \mathbb{N}_0.$$

Potom pro $Z = X + Y$ je

$$r_n = P(Z = n) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k)P(Y = n - j) = \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k},$$

tj. $\{r_n\} = \{p_n\} * \{q_n\}$ a pro vytvořující funkce platí $P_Z(s) = P_X(s)P_Y(s)$.

Pokud $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé nezáporné celočíselné náhodné veličiny, tak jejich součet $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ má vytvořující funkci $P_{S_n}(s) = P_{X_1}(s) \cdots P_{X_n}(s)$.

Příklad 2.1: Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny a nechť X_i má Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda_i > 0$. Určete vytvořující funkci součtu $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

Snadno lze ukázat, že operace konvoluce je komutativní a asociativní.

Definice 2.2: Posloupnost $\{a_n\} * \{a_n\}$ se nazývá *druhá konvoluční mocnina* posloupnosti $\{a_n\}$, značíme $\{a_n\}^{2*} = \{a_n\} * \{a_n\}$. Podobně definujeme *obecnou konvoluční mocninu* předpisem $\{a_n\}^{k*} = \{a_n\}^{(k-1)*} * \{a_n\}$.

Příklad 2.2: *První konvoluční mocnina* je $\{a_n\}^{1*} = \{a_n\}$. Jak byste definovali *nultou konvoluční mocninu* $\{a_n\}^{0*}$? Chceme, aby splňovala $\{a_n\} * \{a_n\}^{0*} = \{a_n\}$.

Je-li $A(s)$ vytvořující funkce posloupnosti $\{a_n\}$, tak z věty 2.1 indukcí zjistíme, že vytvořující funkce posloupnosti $\{a_n\}^{k*}$ je $A(s)^k$.

V případě, že $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé a stejně rozdělené nezáporné celočíselné náhodné veličiny, tak jejich součet S_n má vytvořující funkci $P_{X_1}(s)^n$.

Příklad 2.3: Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny, které mají alternativní rozdělení: $P(X_1 = 0) = 1 - p$, $P(X_1 = 1) = p$ pro $p \in [0, 1]$. Určete vytvořující funkci součtu $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

Příklad 2.4: Mějme $X_1, \ldots, X_n$ nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s geometrickým rozdělením. Určete vytvořující funkci součtu $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.